Operatory na kratach Banacha
Lista 2 (kraty i stożki)

Zad 1. Pokazać, że jeżeli porządek $\leq$ na X jest kratą, to X wraz z operaacjami supremum i infinimum tworzy kratę algebraiczną $(X, \vee, \wedge)$, tzn. dla każdego $x, y, z \in X$ zachodzi

$$\begin{array}{ll} (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) & (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z) \\ x \vee y = y \vee x & x \wedge y = y \wedge x \\ (x \vee y) \wedge y = y & (x \wedge y) \vee y = y \end{array}$$

Pokazać, że każda krata algebraiczna $(X, \vee, \wedge)$ powstaje w ten sposób, dla pewnego porządku.
Hint: Pokazać, że zachodzi równoważność $x \vee y = y \iff x \wedge y = x$ i że warunek przez nią zadany definiuje częściowy porządek na X

Zad 2. Niech $(X, \leq)$ zbiór (częściowo) uporządkowany. Pokazać, że wszystkie skończone podzbiory X posiadają supremum $\iff$ wszystkie pary elementów w X posiadają supremum. Pokazać, że wszystkie skończone podzbiory X posiadają infinimum $\iff$ wszystkie pary elementów w X posiadają infinimum.

Zad 3. Pokazać, że w uporządkowanej przestrzeni wektorowej $(X, \leq)$, dla $x, y, z, w \in X$ oraz $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(1) $x \leq y$ oraz $z \leq w \Longrightarrow x + z \leq y + w$

(2) $x \leq y \iff -x \geq -y$

(3) $x \leq y$ oraz $\alpha < 0 \Longrightarrow \alpha x \geq \alpha y$

(4) $x \geq 0$ oraz $\alpha \leq \beta \Longrightarrow \alpha x \leq \beta x$

Zad 4. Niech $(X, \leq)$ przestrzeń wektorowa uporządkowana. Pokazać, że dla dowolnych $x \in X$ oraz $Y \subseteq X$

(1) jeżeli istnieje $\sup Y$, to istnieją $\inf(-Y)$, $\sup(x + Y)$, i jeśli istnieje $x \wedge \sup Y$, to istnieje $\sup(x \wedge Y)$ oraz
$$-\sup Y = \inf(-Y), \qquad x + \sup Y = \sup(x + Y), \qquad x \wedge \sup Y = \sup(x \wedge Y).$$

(2) jeżeli istnieje $\inf Y$, to istnieją $\sup(-Y)$, $\inf(x + Y)$, i jeśli istnieje $x \vee \inf Y$, to istnieje $\inf(x \vee Y)$ oraz
$$-\inf Y = \sup(-Y), \qquad x + \inf Y = \inf(x + Y), \qquad x \vee \inf Y = \inf(x \vee Y).$$

Zad 5. Niech $(X, \leq)$ przestrzeń wektorowa uporządkowana. Pokazać, że następujące warunki są równoważne:

(1) $(X, \leq)$ jest kratą wektorową;

(2) dla każdych $x, y \in X$ istnieje $x \vee y$;

(3) dla każdych $x, y \in X$ istnieje $x \wedge y$;

(4) dla każdego $x \in X$ istnieje $x \vee 0$;

(5) dla każdego $x \in X$ istnieje $x \wedge 0$.

Jeśli powyższe równoważne warunki zachodzą, to krata $(X, \leq)$ jest dystrybutywna

Zad 6. Pokazać, że jeżeli $K \subseteq X$ jest stożkiem w przestrzeni liniowej X, to przestrzeń liniowa generowana przez K pokrywa się ze zbiorem $K - K = \{x - y : x, y \in K\}$.

Zad 7. Niech $x_1, \ldots, x_k \in X$ będą liniowo niezależnymi wektorami w przestrzeni wektorowej X. Pokazać, że zbiór $K_{x_1,\ldots,x_k} := \{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k : \alpha_i \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty)\}$ jest stożkiem w X. Kiedy stożek ten jest generujący?

Zad 8. Pokazać, że izomorfizm liniowy $\Phi : X \to Y$ zachowuje porządek wtedy i tylko wtedy gdy $\Phi(X_+) = Y_+$.

Zad 9. Pokazać, że przestrzenie uporządkowane $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$ z porządkami zadanymi przez stożki $K_{x_1,\ldots,x_k} \subseteq X$, $K_{y_1,\ldots,y_l} \subseteq Y$ dla liniowo niezależnych wektorów $x_1, \ldots, x_k \in X$ oraz $y_1, \ldots, y_l \in Y$ są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy $n = m$ oraz $k = l$.

Zad 10. Pokazać, że przestrzeń $\mathbb{R}^n$ z porządkiem leksykograficznym, tzn. $x \leq y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x(1) = y(1), \ldots, x(k) = y(k)$ oraz $x(k+1) \leq y(k+1)$ dla pewnego $k = 0, 1, \ldots, n$ jest liniowo uporządkowaną przestrzenią wektorową. Czy porządek ten może pochodzić od stożka takiego jak w Zadaniu 7?

Zad 11. Niech $(X, \leq)$ przestrzeń wektorowa uporządkowana. Pokazać, że X_+ jest stożkiem generującym wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $x, y \in X$ istnieje $z \in X_+$ takie, że $x, y \leq z$.

Zad 12. Pokazać, że stożek $K \subseteq X$ generuje na X porządek $\leq$ który jest kratą wtedy i tylko wtedy, gdy K jest "silnie generujący" w następującym sensie: dla każdego $x \in X$ istnieją $x_+, x_- \in K$ takie, że

(1) $x = x_+ - x_-$; (2) jeśli $x = u - v$ dla $u, v \in K$, to istnieje $c \in K$ takie, że $u = x_+ + c$ oraz $v = x_- + c$.